Το e ως όριο ακολουθίας

Εφαρμογή: Δίνονται οι ακολουθίες $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ και $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

i) Δείξτε ότι $x_n < y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ii) Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Δείξτε ότι οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένες

iv) Δείξτε ότι $\lim\limits_{n} \alpha_n = \lim\limits_{n} \beta_n$.

Λύση:

i) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = x_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) > x_n$$

ii) Εφόσον $x_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ θδο για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$\Pi_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. Πράγματι, $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε:

$$\Pi_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{(n^2+2n+1)-1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \underset{\text{Bernoulli}}{\overset{\text{Ανισότητα}}{\geq}} \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

Αρκεί νδο $\quad 1-\frac{n}{(n+1)^2} > \frac{n+1}{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ή

$$\cancel{1}-\frac{n}{(n+1)^2} > \cancel{1}-\frac{1}{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{ή}$$

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Λύνω λοιπόν την ανωτέρω ανίσωση ως προς n και παίρνω:

$$n(n+2) < (n+1)^2 \iff \cancel{n^2}+\cancel{2n} < \cancel{n^2}+\cancel{2n}+1 \iff 0<1$$

που ισχύει $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, $\Pi_n > \left(\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+2}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n+1}}\right) = 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Συνεπώς, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα

Θα δείξουμε τώρα ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία δηλ. αρκεί νδο $\Pi_n' = \dfrac{y_n}{y_{n+1}} > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$\Pi_n' = \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

Ανισότητα Bernoulli

$$\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{n+1}{(n+1)^2-1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$> \left(1 + \frac{\cancel{n+1}}{(n+1)^{\cancel{2}}}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+2}} = 1$$

Άρα, $\Pi_n' > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Συνεπώς, $y_n > y_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ δηλ. η $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Αφού $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$

$x_1 < x_n$, $\forall n \geq 2$ (1)

Αφού $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow$

$y_n < y_1, \ \forall n \geq 2 \quad (2)$

Απ' τις (1), (2) και την (i) συνάγουμε

$x_1 < x_n < y_n < y_1 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα, (x_n) και (y_n) φραγμένες ακολουθίες.

iv) Εφόσον $(x_n) \nearrow$ και α.φ, η (x_n) συγκλίνει

δηλ. $\exists \ \ell_1 \in \mathbb{R}$ τ.ω $x_n \xrightarrow{n} \ell_1$

Εφόσον $(y_n) \searrow$ και κ.φ, η (y_n) συγκλίνει

δηλ. $\exists \ \ell_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω $y_n \xrightarrow{n} \ell_2$

Ο.δ.ο $\ell_1 = \ell_2$. ή $\ell_1 - \ell_2 = 0$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$0 < y_n - x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\left(\cancel{1} + \frac{1}{n}\right) \cancel{-1}\right)$$

$$= x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_n}{n}$$

Για $n \to \infty$: $x_n \to \ell_1$ και $\frac{1}{n} \to 0$

Άρα, $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n} 0$

Συνεπώς, απ' το Κριτήριο Ισοσύγκλισης ακολουθιών

$$\lim_{n} (y_n - x_n) = 0 \iff \ell_2 - \ell_1 = 0 \iff \ell_1 = \ell_2.$$

Σημείωση: Το κοινό όριο των (x_n) & (y_n) συμβολίζεται με e και είναι η παγκόσμια σταθερά των φυσικών λογαριθμών.

Επίσης, $2 < e < 3$ και αυτό φαίνεται μέσα απ' τις ανισότητες

$$x_n < e < y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n$$

Για $n = 1 \Rightarrow \quad 2 = x_1 < e < y_1 = 4$

$\vdots$

Για $n = 5 \Rightarrow \quad 2{,}48832 = x_5 < e < y_5 = 2{,}985984$

Τι πρέπει να θυμάμαι!!

1) $\lim_{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

2) $2 < x_n < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$